Électromagnétisme – Chapitre 6

Ondes électromagnétiques

I. Propagation dans le vide . . . 1
I.1. Équation de propagation vérifiée par les champs . . . 1
I.2. Solution générale en ondes planes progressives . . . 2
I.3. Solution en ondes planes progressives monochromatiques . . . 3
I.4. Structure d'une onde plane progressive monochromatique . . . 3
II. Polarisation . . . 5
II.1. État de polarisation . . . 5
II.2. Polariseur . . . 6
III. Étude énergétique . . . 7
III.1. Expression de l'onde étudiée . . . 7
III.2. Densité volumique d'énergie électromagnétique . . . 7
III.3. Vecteur de Poynting . . . 8
IV. Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait . . . 9
IV.1. Modèle du conducteur parfait . . . 9
IV.2. Expression de l'onde réfléchie . . . 9
IV.3. Structure de l'onde résultante . . . 10
V. Application aux cavités résonantes . . . 11
V.1. Quantification du champ électrique . . . 11
V.2. Représentation des modes propres . . . 12

Dans ce chapitre, nous allons étudier différents aspects de la propagation et de la réflexion des ondes électromagnétiques.

I. Propagation dans le vide

I.1. Équation de propagation vérifiée par les champs

On rappelle les équations de Maxwell dans une région de l'espace vide, c'est-à-dire lorsque $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Afin d'établir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique, on utilise la relation d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$$

avec :

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

et :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

soit :

$$-\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{E}$$

d'où on en déduit l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Application :

Montrons que le champ magnétique vérifie la même équation de propagation.

On obtient : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{B}\right) - \Delta\vec{B}$, avec $\text{div}\,\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right) = \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$, soit : $-\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{B}$, d'où on en déduit l'équation de propagation vérifiée par le champ magnétique : $\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

Dans le vide, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient donc l'**équation de d'Alembert** pour chacune de leurs composantes :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

et on en déduit l'expression de la célérité de la lumière à laquelle ils se propagent :

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \approx 3{,}0.10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}.$$

I.2. Solution générale en ondes planes progressives

On a vu précédemment que la solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes progressives qui se propagent dans des sens opposés. De façon analogue, on admet que la solution générale de l'équation de d'Alembert peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes progressives qui se propagent dans toutes les directions de l'espace.

Une onde plane progressive qui se propage dans une direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ quelconque peut s'exprimer de la forme :

$$s(M,t) = f\left(t - \frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}}{v}\right)$$

avec f une fonction et $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position.

Application :

Retrouvons qu'une onde plane progressive qui se propage dans le sens des x croissants peut s'exprimer de la forme :

$$s(M,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Cette onde se propage dans la direction $\vec{u} = \vec{e}_x$, d'où : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM} = \vec{e}_x\cdot\left(x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z\right) = x$, elle peut donc s'exprimer de la forme : $s(M,t) = f\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$.

Comme les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient l'équation de d'Alembert, ils peuvent s'écrire comme une superposition d'ondes planes progressives qui se propagent dans toutes les directions $\vec{u}_i$ de l'espace :

$$\vec{E}(M,t) = \sum_i \vec{E}_i\left(t - \frac{\vec{u}_i\cdot\overrightarrow{OM}}{v}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(M,t) = \sum_i \vec{B}_i\left(t - \frac{\vec{u}_i\cdot\overrightarrow{OM}}{v}\right).$$

Puisque l'analyse de Fourier permet de montrer que toute onde plane progressive peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques, nous nous limiterons à l'étude de ce type d'ondes dans la suite du chapitre.

I.3. Solution en ondes planes progressives monochromatiques

Dans le cas où le champ électrique est une onde plane progressive monochromatique (OPPM) qui se propage dans la direction $\vec{u}$, il peut s'exprimer de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0}\cos\left(\omega\,t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi\right)$$

avec $\vec{k} = k\,\vec{u} = \dfrac{\omega}{c_0}\,\vec{u}$ le vecteur d'onde.

Comme en électronique, on peut utiliser la représentation complexe pour simplifier les calculs en associant à chaque champ réel $\overrightarrow{E}(M,t)$ un champ complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega\,t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)}$$

avec $\underline{\overrightarrow{E}}_0 = \overrightarrow{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$ son amplitude complexe.

Dans la suite du chapitre, nous allons toujours considérer une OPPM électromagnétique qui se propage dans le sens des z croissants pour alléger les notations, c'est-à-dire que $\vec{u} = \vec{e}_z$, sachant que l'on peut toujours s'y ramener par une rotation du système d'axes. Celle-ci est alors composée :

- d'un champ électrique qui s'exprime de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0}\cos\left(\omega\,t - k\,z + \varphi\right)$$

- d'un champ magnétique qui s'exprime de la forme :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \overrightarrow{B_0}\cos\left(\omega\,t - k\,z + \varphi\right)$$

avec $\vec{k} = k\,\vec{e}_z = \dfrac{\omega}{c_0}\,\vec{e}_z$.

I.4. Structure d'une onde plane progressive monochromatique

Afin d'établir la structure d'une OPPM électromagnétique, nous allons appliquer les équations de Maxwell aux champs complexes composant cette OPPM qui peuvent s'exprimer de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - k\,z)} \qquad \text{et} \qquad \underline{\overrightarrow{B}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{B}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t - k\,z)}$$

avec $\vec{k} = k\,\vec{e}_z = \dfrac{\omega}{c_0}\,\vec{e}_z$.

Équation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss donne :

$$\mathrm{div}\,\underline{\overrightarrow{E}} = 0$$

avec :

$$\mathrm{div}\,\underline{\overrightarrow{E}} = \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = -\mathrm{j}\,k\,\underline{E}_z$$

où l'on peut exprimer :

$$k\,\underline{E}_z = \vec{k}\cdot\underline{\overrightarrow{E}}$$

soit :

$$-\mathrm{j}\,\vec{k}\cdot\underline{\overrightarrow{E}} = 0$$

d'où on en déduit que :

$$\vec{k} \cdot \underline{\overrightarrow{E}} = 0$$

soit en prenant la partie réelle :

$$\vec{k} \cdot \overrightarrow{E} = 0.$$

On peut alors en conclure que le champ électrique est **transverse**, c'est-à-dire qu'il oscille dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

Équation de Maxwell-Thomson

Application :

> À l'aide de l'équation de Maxwell-Thomson, montrons que le champ magnétique est également transverse.
> L'équation de Maxwell-Thomson donne : $\operatorname{div} \underline{\overrightarrow{B}} = 0$, avec : $\operatorname{div} \underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{\partial \underline{B}_z}{\partial z} = -\mathrm{j}\, k\, \underline{B}_z$, où l'on peut exprimer : $k\, \underline{B}_z = \vec{k} \cdot \underline{\overrightarrow{B}}$, soit : $-\mathrm{j}\, \vec{k} \cdot \underline{\overrightarrow{B}} = 0$, d'où on en déduit que : $\vec{k} \cdot \underline{\overrightarrow{B}} = 0$, soit en prenant la partie réelle : $\vec{k} \cdot \overrightarrow{B} = 0$.
> On peut alors en conclure que le champ magnétique est également transverse.

Équation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \underline{\overrightarrow{E}} = -\frac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t}$$

avec :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \underline{\overrightarrow{E}} = -\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z}\, \vec{e}_x + \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z}\, \vec{e}_y = \mathrm{j}\, k\, \underline{E}_y\, \vec{e}_x - \mathrm{j}\, k\, \underline{E}_x\, \vec{e}_y$$

où l'on peut exprimer :

$$k\, \underline{E}_y\, \vec{e}_x - k\, \underline{E}_x\, \vec{e}_y = -\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}$$

et :

$$\frac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} = \mathrm{j}\, \omega\, \underline{\overrightarrow{B}}$$

soit :

$$-\mathrm{j}\, \vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} = -\mathrm{j}\, \omega\, \underline{\overrightarrow{B}}$$

d'où on en déduit que :

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}$$

et en prenant la partie réelle, on obtient la **relation de structure** d'une OPPM :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}}.$$

On peut en conclure que :

- le champ électrique et le champ magnétique sont **orthogonaux** entre eux ;
- le trièdre $\left(\vec{k}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\right)$ est **direct** ;
- comme $k = \dfrac{\omega}{c_0}$, les normes des champs vérifient :

$$\left\|\overrightarrow{B}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{E}\right\|}{c_0}.$$

Équation de Maxwell-Ampère

Application :

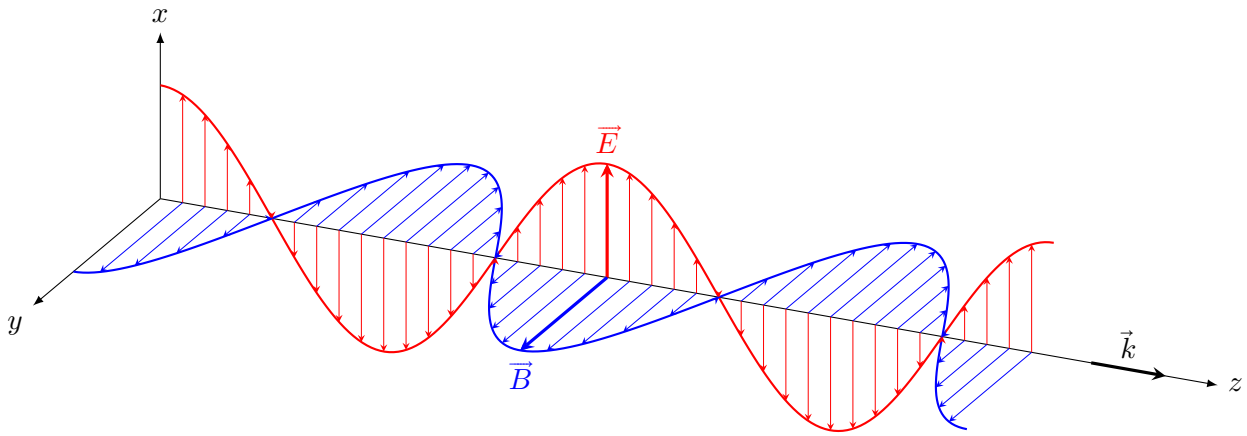
À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, montrons que le champ électrique peut s'exprimer :

$$\overrightarrow{E} = -c_0^2 \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{B}}{\omega}.$$

L'équation de Maxwell-Ampère donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\overrightarrow{B}} = \varepsilon_0\,\mu_0 \dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}$, avec : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\overrightarrow{B}} = -\dfrac{\partial \underline{B}_y}{\partial z}\vec{e}_x + \dfrac{\partial \underline{B}_x}{\partial z}\vec{e}_y = \text{j}\,k\,\underline{B}_y\,\vec{e}_x - \text{j}\,k\,\underline{B}_x\,\vec{e}_y$, où l'on peut exprimer : $k\,\underline{B}_y\,\vec{e}_x - k\,\underline{B}_x\,\vec{e}_y = -\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}$, et : $\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} = \text{j}\,\omega\,\underline{\overrightarrow{E}}$, soit : $-\text{j}\,\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\text{j}\,\omega\,\underline{\overrightarrow{E}}$, d'où on en déduit que : $\underline{\overrightarrow{E}} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}\dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}}{\omega} = -c_0^2\dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}}{\omega}$, soit en prenant la partie réelle : $\overrightarrow{E} = -c_0^2 \dfrac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{B}}{\omega}$.

Représentation d'une OPPM électromagnétique

À partir des résultats précédents, on peut représenter la structure d'une OPPM électromagnétique qui se propage dans le sens des z croissants :



On remarque que les deux champs sont en phase, c'est-à-dire qu'un nœud de vibration pour le champ électrique correspond à un nœud de vibration pour le champ magnétique, et de même pour un ventre de vibration.

II. Polarisation

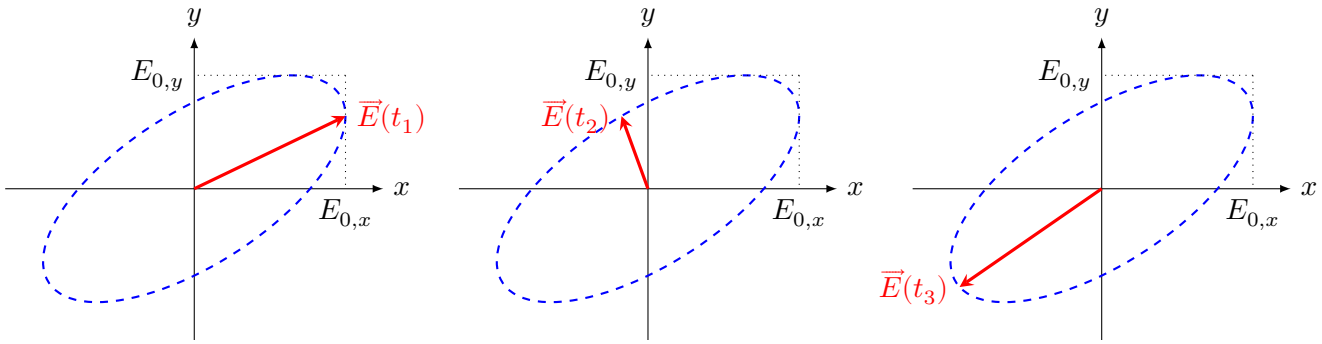
II.1. État de polarisation

La **polarisation** d'une onde électromagnétique correspond à la direction de son champ électrique.

De façon générale, le champ électrique d'une OPPM électromagnétique qui se propage dans le sens des z croissants peut s'exprimer de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_{0,x}\cos\left(\omega\,t - k\,z + \varphi_x\right)\vec{e}_x + E_{0,y}\cos\left(\omega\,t - k\,z + \varphi_y\right)\vec{e}_y.$$

On représente ci-dessous le champ électrique à différents instants successifs dans le plan (xOy) perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

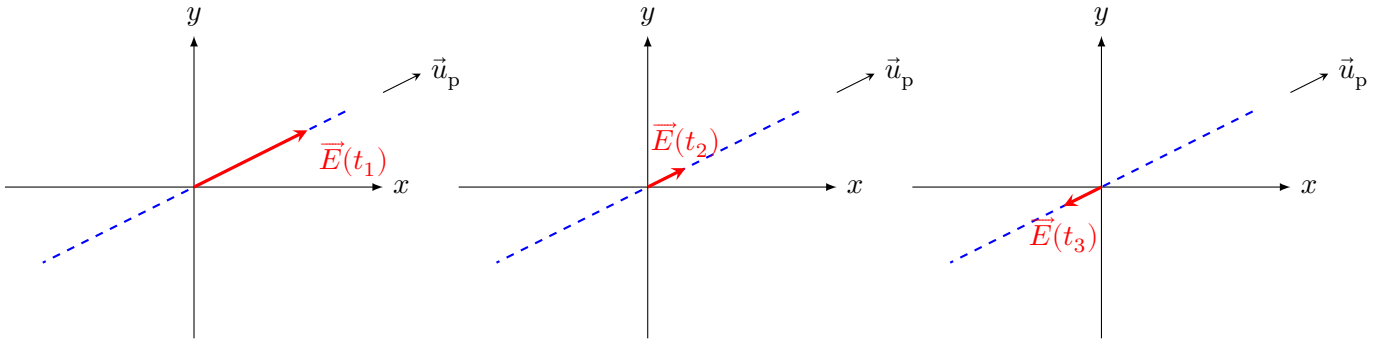


On observe que l'extrémité du champ électrique balaye une ellipse dans ce plan au cours du temps, une OPPM possède ainsi généralement une **polarisation elliptique**.

La **polarisation rectiligne** est un cas particulier de polarisation elliptique, où le champ électrique conserve une direction constante au cours du temps, il peut alors s'exprimer de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - k z + \varphi)\, \vec{u}_\text{p}$$

avec $\vec{u}_\text{p}$ sa direction de polarisation. On représente ci-dessous le champ électrique à différents instants successifs dans le plan (xOy) perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.



Application :

Indiquons la direction de propagation et la direction de polarisation des OPPM dont les champs électriques s'expriment :

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t + k y)\, \vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t - k z) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \right).$$

L'onde associée au champ $\vec{E}_1$:

- se propage dans le sens des y décroissants ;
- est polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}_\text{p} = \vec{e}_z$.

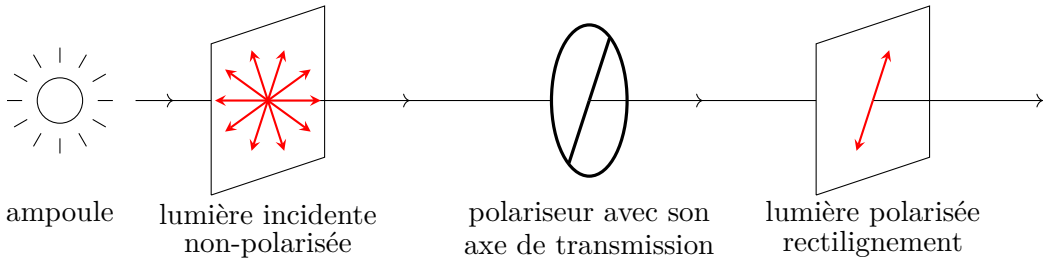
L'onde associée au champ $\vec{E}_2$:

- se propage dans le sens des z croissants ;
- est polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}_\text{p} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \right)$.

II.2. Polariseur

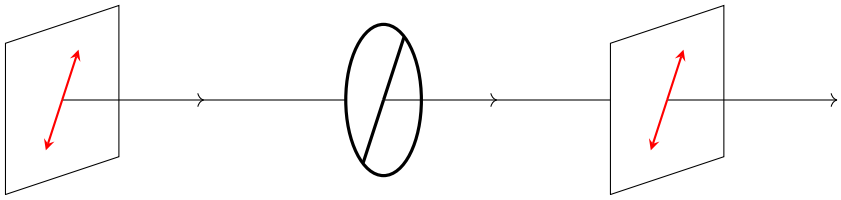
Un **polariseur** est un système optique qui permet de sélectionner une direction de polarisation, définie par son **axe de transmission**. Une onde en sortie d'un polariseur est polarisée rectilignement dans la direction de son axe de transmission.

On peut prendre l'exemple d'un polariseur éclairé par une ampoule. La lumière incidente émise par l'ampoule n'est pas polarisée, c'est-à-dire qu'elle est constituée de nombreuses OPPM polarisées dans toutes les directions. En sortie du polariseur, on observe que la lumière est polarisée rectilignement dans la direction de l'axe de transmission.

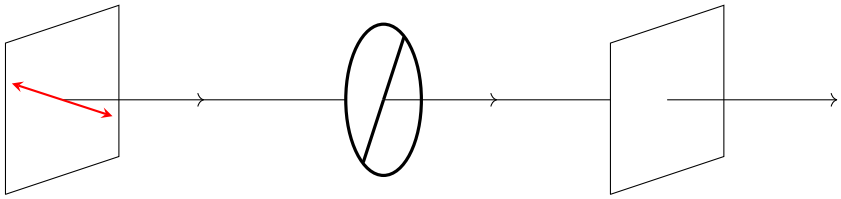


On peut étudier notamment deux cas particuliers :

- si un polariseur est éclairé par une onde incidente polarisée rectilignement dans la même direction que son axe de transmission, alors l'onde traverse le polariseur sans être modifiée ;



- si un polariseur est éclairé par une onde incidente polarisée rectilignement dans la direction perpendiculaire à son axe de transmission, alors aucune onde ne traverse le polariseur.



Pour mettre en évidence expérimentalement qu'une lumière est polarisée rectilignement, il suffit donc de faire tourner l'axe de transmission d'un polariseur éclairé par cette lumière. Si pour un certain angle, l'onde est totalement arrêtée par le polariseur, alors la lumière incidente est polarisée rectilignement dans la direction perpendiculaire à l'axe de transmission.

III. Étude énergétique

III.1. Expression de l'onde étudiée

Nous allons réaliser l'étude énergétique d'une OPPM électromagnétique qui se propage dans le sens des z croissants et qui est polarisée rectilignement dans la direction $\vec{e}_x$. Le champ électrique de cette onde s'exprime alors de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - k z + \varphi)\, \vec{e}_x.$$

Le champ magnétique de cette onde s'exprime à l'aide de la relation de structure :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c_0} \cos(\omega t - k z + \varphi)\, \vec{e}_y.$$

III.2. Densité volumique d'énergie électromagnétique

On rappelle que la densité volumique d'énergie électromagnétique s'exprime :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{B}^2}{\mu_0}.$$

On obtient pour cette OPPM électromagnétique :

$$u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,[E_0\cos(\omega\,t - k\,z + \varphi)]^2 + \frac{1}{2\,\mu_0}\left[\frac{E_0}{c_0}\cos(\omega\,t - k\,z + \varphi)\right]^2$$

soit :

$$u = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_0^2\cos^2(\omega\,t - k\,z + \varphi) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_0^2\cos^2(\omega\,t - k\,z + \varphi) = \varepsilon_0\,E_0^2\cos^2(\omega\,t - k\,z + \varphi)\,.$$

On remarque que la densité volumique d'énergie électromagnétique d'une OPPM est **équitablement répartie** sous les formes électrique et magnétique.

Pour des ondes électromagnétiques de fréquences élevées, telles que la lumière visible, on rappelle que les capteurs ne sont pas capables de distinguer les oscillations temporelles des champs, et ne mesurent donc que la valeur moyenne de l'intensité reçue. On peut alors exprimer la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique de cette OPPM :

$$\langle u\rangle = \varepsilon_0\,E_0^2\,\langle\cos^2(\omega\,t - k\,z + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_0^2.$$

III.3. Vecteur de Poynting

On rappelle que le vecteur de Poynting s'exprime :

$$\overrightarrow{R} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}.$$

On obtient pour cette OPPM électromagnétique :

$$\overrightarrow{R} = \frac{1}{\mu_0}\,[E_0\cos(\omega\,t - k\,z + \varphi)\,\vec{e}_x]\wedge\left[\frac{E_0}{c_0}\cos(\omega\,t - k\,z + \varphi)\,\vec{e}_y\right] = \varepsilon_0\,c_0\,E_0^2\cos^2(\omega\,t - k\,z + \varphi)\,\vec{e}_z$$

que l'on peut exprimer :

$$\overrightarrow{R} = u\,c_0\,\vec{e}_z.$$

On remarque que le vecteur de Poynting est proportionnel à la densité volumique d'énergie électromagnétique et orienté **dans le sens de propagation de l'onde**, il représente ainsi la propagation de l'énergie de l'onde.

On peut également exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette OPPM :

$$\left\langle\overrightarrow{R}\right\rangle = \varepsilon_0\,c_0\,E_0^2\,\langle\cos^2(\omega\,t - k\,z + \varphi)\rangle\,\vec{e}_z = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,c_0\,E_0^2\,\vec{e}_z = \langle u\rangle\,c_0\,\vec{e}_z$$

d'où on en déduit l'expression de la puissance moyenne rayonnée à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde :

$$\langle P_{\text{ray}}\rangle = \iint_S \left\langle\overrightarrow{R}\right\rangle\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = \langle u\rangle\,c_0\iint_S \mathrm{d}S = \langle u\rangle\,c_0\,S.$$

Application :

Vérifions que l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide est bien respectée pour cette OPPM.

On peut exprimer pour cette OPPM :

- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -2\,\omega\,\varepsilon_0\,E_0^2\sin(\omega\,t - k\,z + \varphi)\cos(\omega\,t - k\,z + \varphi)$
- $\operatorname{div}\overrightarrow{R} = \dfrac{\partial R_z}{\partial z} = 2\,k\,\varepsilon_0\,c_0\,E_0^2\sin(\omega\,t - k\,z + \varphi)\cos(\omega\,t - k\,z + \varphi)$

et comme $k = \dfrac{\omega}{c_0}$, on obtient : $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{R} = 0$, l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide est donc bien vérifiée.

IV. Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

IV.1. Modèle du conducteur parfait

Un **conducteur** est un milieu dans lequel la présence d'un champ électrique engendre un courant. Lorsqu'une onde électromagnétique qui se propage dans le vide arrive sur un conducteur, on observe expérimentalement qu'il apparait une onde réfléchie dans le vide et une onde transmise dans le conducteur (comme au niveau d'un dioptre en optique géométrique). L'amplitude de l'onde transmise est alors d'autant plus faible que la conductivité électrique du conducteur est élevée.

On définit un **conducteur parfait** comme un conducteur dont la conductivité électrique est infinie. Aucune onde électromagnétique ne peut alors pénétrer dans un tel milieu, et on admet qu'à l'intérieur d'un conducteur parfait :

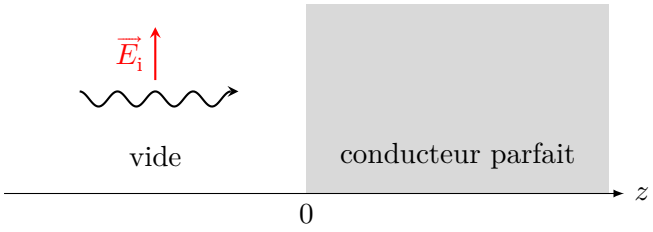
- le champ électrique $\vec{E}$ est nul ;
- le champ magnétique $\vec{B}$ est nul ;
- la densité volumique de charges ρ est nulle ;
- le vecteur densité volumique de courants $\vec{j}$ est nul ;

il peut cependant exister des charges et des courants à la surface d'un conducteur parfait.

Les observations expérimentales montrent que le modèle du conducteur parfait permet de décrire correctement le comportement de la plupart des conducteurs métalliques, et ceci dans une large gamme de fréquences.

IV.2. Expression de l'onde réfléchie

On considère une OPPM électromagnétique dans le demi-espace vide $z < 0$ qui se propage dans le sens des z croissants et qui est polarisée rectilignement dans la direction $\vec{e}_x$. Elle arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $z > 0$, comme représenté ci-dessous.



Le champ électrique de cette onde incidente s'exprime de la forme :

$$\vec{E}_\text{i}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - k z + \varphi)\, \vec{e}_x$$

avec $\vec{k}_\text{i} = k\, \vec{e}_z = \dfrac{\omega}{c_0}\, \vec{e}_z$ le vecteur d'onde de l'onde incidente, et on en déduit l'expression du champ magnétique associé :

$$\vec{B}_\text{i}(M,t) = \frac{\vec{k}_\text{i} \wedge \vec{E}_\text{i}}{\omega} = \frac{E_0}{c_0} \cos(\omega t - k z + \varphi)\, \vec{e}_y.$$

Le champ électrique étant tangent à la surface du conducteur, on peut montrer qu'il est continu à l'interface avec le conducteur. On admet alors la **relation de passage** :

$$\vec{E}(z = 0^-, t) = \vec{E}(z = 0^+, t).$$

Comme le champ électrique à l'intérieur du conducteur parfait est nul, la relation de passage implique :

$$\vec{E}(z = 0^-, t) = \vec{0}$$

mais $\overrightarrow{E_\text{i}}(z=0^-,t)\neq\vec{0}$ pour l'onde incidente dans le vide, il doit donc forcément exister une onde réfléchie qui se superpose à celle-ci. Cette onde étant générée par une OPPM incidente de pulsation ω, elle doit avoir la forme d'une OPPM de même pulsation qui se propage dans le sens des z décroissants, et son champ électrique peut alors s'exprimer de façon générale :

$$\overrightarrow{E_\text{r}}(M,t)=E'_{0,x}\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi'_x\right)\vec{e}_x+E'_{0,y}\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi'_y\right)\vec{e}_y.$$

Le champ électrique qui vérifie la relation de passage est le champ résultant de la superposition du champ incident et du champ réfléchi dans le demi-espace vide $z<0$, il s'exprime :

$$\overrightarrow{E}(M,t)=\overrightarrow{E_\text{i}}(M,t)+\overrightarrow{E_\text{r}}(M,t)=\left[E_0\cos\left(\omega\,t-k\,z+\varphi\right)+E'_{0,x}\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi'_x\right)\right]\vec{e}_x+E'_{0,y}\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi'_y\right)\vec{e}_y.$$

La relation de passage implique alors qu'à chaque instant t :

$$\begin{cases}E_0\cos\left(\omega\,t+\varphi\right)+E'_{0,x}\cos\left(\omega\,t+\varphi'_x\right)=0\\[2ex] E'_{0,y}\cos\left(\omega\,t+\varphi'_y\right)=0\end{cases}$$

d'où on en déduit que :

$$E'_{0,x}=-E_0\qquad\qquad\varphi'_x=\varphi\qquad\qquad E'_{0,y}=0$$

et on peut finalement exprimer le champ électrique réfléchi :

$$\overrightarrow{E_\text{r}}(M,t)=-E_0\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi\right)\vec{e}_x.$$

Comme l'onde réfléchie est également polarisée rectilignement dans la direction $\vec{e}_x$, on remarque que la réflexion sur le conducteur ne modifie pas la polarisation.

Application :

Déterminons l'expression du champ magnétique réfléchi à l'aide de la relation de structure.
Le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est : $\vec{k}_\text{r}=-k\,\vec{e}_z=-\dfrac{\omega}{c_0}\,\vec{e}_z$, d'où on en déduit l'expression du champ magnétique réfléchi : $\overrightarrow{B_\text{r}}(M,t)=\dfrac{\vec{k}_\text{r}\wedge\overrightarrow{E_\text{r}}}{\omega}=\dfrac{E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi\right)\vec{e}_y$.

IV.3. Structure de l'onde résultante

Le champ électrique de l'onde résultante dans le demi-espace vide $z<0$ s'exprime finalement :

$$\overrightarrow{E}(M,t)=\overrightarrow{E_\text{i}}(M,t)+\overrightarrow{E_\text{r}}(M,t)=\left[E_0\cos\left(\omega\,t-k\,z+\varphi\right)-E_0\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi\right)\right]\vec{e}_x$$

et on rappelle la formule de trigonométrie :

$$\cos\left(p\right)-\cos\left(q\right)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$$

d'où :

$$\overrightarrow{E}(M,t)=2\,E_0\sin\left(\omega\,t+\varphi\right)\sin\left(k\,z\right)\vec{e}_x.$$

De même, le champ magnétique de l'onde résultante dans le demi-espace vide $z<0$ s'exprime finalement :

$$\overrightarrow{B}(M,t)=\overrightarrow{B_\text{i}}(M,t)+\overrightarrow{B_\text{r}}(M,t)=\left[\frac{E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t-k\,z+\varphi\right)+\frac{E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t+k\,z+\varphi\right)\right]\vec{e}_y$$

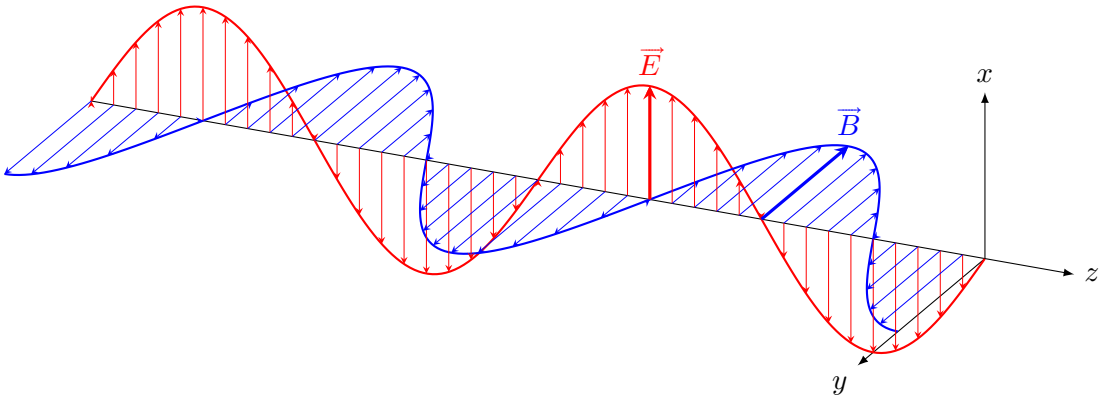
et on rappelle la formule de trigonométrie :

$$\cos\left(p\right)+\cos\left(q\right)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

d'où :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{2\,E_0}{c_0}\cos(\omega\,t+\varphi)\cos(k\,z)\,\vec{e}_y.$$

Ces champs présentent la forme d'**ondes stationnaires**, donc ils ne se propagent pas. On peut représenter la structure de l'onde résultante :



On remarque que les deux champs sont en quadrature de phase, c'est-à-dire qu'un nœud de vibration pour le champ électrique correspond à un ventre de vibration pour le champ magnétique, et réciproquement.

Application :

Montrons que la moyenne temporelle du vecteur de Poynting associé à cette onde résultante est nulle.

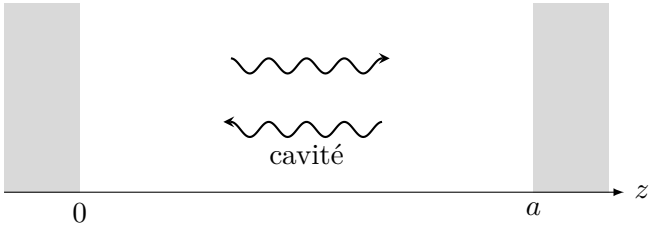
Le vecteur de Poynting associé à l'onde résultante s'exprime : $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{4\,E_0^2}{\mu_0\,c_0}\sin(\omega\,t+\varphi)\sin(k\,z)\cos(\omega\,t+\varphi)\cos(k\,z)\,\vec{e}_z.$

La moyenne temporelle de ce vecteur de Poynting est alors : $\left\langle\overrightarrow{R}\right\rangle = \dfrac{4\,E_0^2}{\mu_0\,c_0}\sin(k\,z)\cos(k\,z)\left\langle\sin(\omega\,t+\varphi)\cos(\omega\,t+\varphi)\right\rangle\,\vec{e}_z = \vec{0}.$

V. Application aux cavités résonantes

V.1. Quantification du champ électrique

On considère une cavité vide à l'intérieur d'un conducteur parfait, comprise entre les plans $z=0$ et $z=a$. Une OPPM électromagnétique qui se propage dans le sens des z croissants et qui est polarisée rectilignement dans la direction $\vec{e}_x$ est générée dans la cavité, elle se réfléchie alors successivement entre les deux parois du conducteur, comme représenté ci-dessous.



L'onde résultante de la superposition des réflexions successives est une onde stationnaire, dont on suppose que le champ électrique s'exprime de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0\sin(\omega\,t+\varphi_1)\sin(k\,z+\varphi_2)\,\vec{e}_x$$

avec $k = \dfrac{\omega}{c_0}$.

La relation de passage vu précédemment implique que le champ électrique dans la cavité s'annule sur les parois du conducteur, ce qui impose les conditions aux limites suivantes :

- $\vec{E}(z=0,t)=\vec{0}$, soit : $\sin(\varphi_2)=0$, d'où on en déduit que : $\varphi_2 = m\,\pi$ avec m un entier ;
- $\vec{E}(z=a,t)=\vec{0}$, soit : $\sin(k\,a+\varphi_2)=0$, d'où on en déduit que : $k\,a = n\,\pi$ avec n un entier.

Le vecteur d'onde dans la cavité est **quantifié**, c'est-à-dire qu'il ne peut prendre que certaines valeurs, et s'exprime :

$$k_n = \frac{n\,\pi}{a}$$

avec n un entier.

La pulsation est alors également **quantifiée** et s'exprime :

$$\omega_n = k_n\,c_0 = \frac{n\,\pi\,c_0}{a}$$

avec n un entier.

Le champ électrique s'exprime finalement :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \sin(\omega_n\,t+\varphi_1)\sin(k_n\,z+m\,\pi)\,\vec{e}_x = \pm E_0 \sin\left(\frac{n\,\pi\,c_0}{a}\,t+\varphi_1\right)\sin\left(\frac{n\,\pi}{a}\,z\right)\vec{e}_x.$$

V.2. Représentation des modes propres

On déduit des résultats précédents qu'une onde stationnaire ne peut exister dans la cavité que pour certaines valeurs du vecteur d'onde, qui définissent ainsi les **modes propres** de la cavité. Pour tout autre valeur du vecteur d'onde, l'onde se déphase d'une certaine quantité entre chaque réflexion, aboutissant alors à des interférences destructives dans la cavité (comme en optique ondulatoire).

Chaque mode propre n correspond à une longueur d'onde :

$$\lambda_n = \frac{2\,\pi}{k_n} = \frac{2\,a}{n}$$

et présente donc :

- n ventres de vibration espacés successivement de $\dfrac{\lambda_n}{2}$;
- $n+1$ nœuds de vibration espacés successivement de $\dfrac{\lambda_n}{2}$.

On représente ci-dessous l'allure du champ électrique dans la cavité pour les trois premiers modes propres.

